Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA1116)
3^{er} Examen Parcial (40 %)

Sep – Dic 2014
Examen tipo **B**

Duración: 1 hora 50 minutos

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

Pregunta 1. (12 ptos.) Sea $T: \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ una transformación definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z & z \\ z & x+y-z \end{pmatrix}$$

a. Demuestre que T es una transformación lineal;

b. Halle los subespacios $\mathrm{Im}(T)$ y $\mathrm{Nu}(T)$ y sus dimensiones;

c. Halle la matriz asociada a T para las bases canónicas.

Pregunta 2. (12 ptos.) Dado el espacio vectorial real $V = P_2 = \{a_0+a_1t+a_2t^2 \mid a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2\}$ con el producto interno definido por

$$(u,v) = u(-1)v(-1) + u(0)v(0) + u(1)v(1), \quad u(t), v(t) \in V.$$

Sea $H = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_i \in \mathbb{R},\ a_0 = -a_1 \text{ y } a_2 = a_1\}$ un subespacio de V.

a. Halle el subespacio ortogonal $H^{\perp}$

b. Si $v(t) = 4 + t + 3t^2$, halle $\mathrm{Proy}_{H^{\perp}} v$

Pregunta 3. (10 ptos.) Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable; en caso de serlo, halle la matriz diagonalizante C.

Pregunta 4. (6 ptos.) Sea A una matriz $n \times n$ no singular con autovalores λ_i y autovectores asociados v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Halle los autovalores de las matrices

a. A^T

b. A^{-1}

c. $A - 3I$

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

3º PARCIAL MA1116

SOLUCIONES

Nombre: ____________________

Carnet: ____________ Sección: ______

1

a) $$\boxed{T(\lambda\vec{u}+\vec{v}) =} \; T\begin{bmatrix}\lambda x_1 + x_2\\ \lambda y_1 + y_2\\ \lambda z_1 + z_2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2 & \lambda z_1 + z_2\\ \lambda z_1 + z_2 & \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2 - \lambda z_1 - z_2\end{pmatrix}$$

(1)

$$= \begin{pmatrix}\lambda(x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) & \lambda z_1 + z_2\\ \lambda(z_1 + z_2) & \lambda(x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2)\end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \lambda\begin{pmatrix}x_1 + y_1 + z_1 & z_1\\ z_1 + z_2 & x_1 + y_1 + z_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2 + y_2 + z_2 & z_2\\ z_2 & x_2 + y_2 + z_2\end{pmatrix}$$

(1)

$$= \lambda T\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix} + T\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{bmatrix} = \boxed{\lambda T(\vec{u}) + T(\vec{v})} \qquad \text{(4 puntos)}$$

(1)

b) $N(T)$:

$x+y+z=0 \qquad z=0 \qquad x+y-z=0$

$\Rightarrow x+y=0$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y\\ y\\ 0\end{bmatrix} = y\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N(T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right\} \ (1)\\ \dim N(T) = 1 \ (1)\end{array}}$$

$Im(T)$:

$$\begin{pmatrix}x+y+z & z\\ z & x+y-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ z=b \\ z=c \\ x+y-z=d \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x+y+b=a \\ x+y=a-b \\ \\ x+y-b=d \\ x+y=b+d \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a-b=b+d \\ b=c \end{matrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{matrix} a=2b+d \\ b=b \\ c=b \\ d=d \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$= b\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Im(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} (1) \quad \dim Im(T) = 2\ (1)}$$

(4 puntos)

c) $$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\boxed{A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} (1)}$$

(4 puntos)

2 a) Primero hallamos una base de H

$H = \{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 / a_0 = -a_1,\ a_2 = a_1 \}$

$p(x) \in H: \quad -a_1 + a_1 t \overset{(1)}{+} a_1 t^2 = a_1(-1 + 1t + 1t^2)$

$H = \text{gen}\{-1 + t + t^2\} = \text{gen}\{r(x)\}$ (1)

Para hallar $H^\perp$, sea $q(x) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

para que $-1 + t + t^2 \perp a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

$< r(x), q(x) > = r(-1)\, q(-1) + r(0) \cdot q(0) + r(1) \cdot q(1) = 0$ (1)

$-1 \cdot (a_0 - a_1 + a_2) + (-1) \cdot a_0 + 1 \cdot (a_0 + a_1 + a_2) = 0$ (1)

$-\cancel{a_0} + a_1 - \cancel{a_2} - a_0 + \cancel{a_0} + a_1 + \cancel{a_2} = 0$

$2a_1 - a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = 2a_1$ (1)

$H^\perp: \quad 2a_1 + a_1 t + a_2 t^2 = a_1(2+t) + a_2(t^2)$

$\boxed{H^\perp = \text{gen}\{2+t,\ t^2\}}$ (1) (6 puntos)

b) $\text{Proy}_{H^\perp}(v) = ?$

$V = \text{Proy}_H v \overset{(1)}{+} \text{Proy}_{H^\perp} v \Rightarrow \text{Proy}_{H^\perp} v = v - \text{Proy}_H v$

H está generado por $r(x) = -1 + t + t^2$. Tenemos que normalizar este polinomio:

$\|r(x)\|^2 = < -1 + t + t^2, -1 + t + t^2 > = [r(-1)]^2 + [r(0)]^2 + [r(1)]^2$

$\| r(x) \|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow \| r(x) \| = \sqrt{3}$ (1)

$Proy_H V = \langle V, \frac{r(x)}{\sqrt{3}} \rangle \frac{r(x)}{\sqrt{3}}$ (1)

$= \langle 4+t+3t^2, \frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{t^2}{\sqrt{3}} \rangle \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{t^2}{\sqrt{3}} \right)$

$= \left(6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{t^2}{\sqrt{3}} \right)$

$= \frac{10}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{t^2}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{10}{3} + \frac{10}{3} t + \frac{10}{3} t^2$ (2)

$Proy_{H^\perp}(v) = v - Proy_H(v) = (4+t+3t^2) - \left(-\frac{10}{3} + \frac{10}{3} t + \frac{10}{3} t^2 \right)$

$\boxed{Proy_{H^+}(v) = \frac{22}{3} - \frac{7}{3} t - \frac{1}{3} t^2}$ (1) (6 puntos)

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 0 \Rightarrow \quad -27 + (1-\lambda)^2(-5-\lambda) - 27 + 9(1-\lambda) + 9(5+\lambda) + 9(1-\lambda) = 0$$

$$-54 + (1-\lambda)^2(-5-\lambda) + 9(7-\lambda) = 0$$

$$-54 + (1-2\lambda+\lambda^2)(-5-\lambda) + 63 - 9\lambda = 0$$

$$9 - 9\lambda - 5 - \lambda + 10\lambda + 2\lambda^2 - 5\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 + 0\lambda + 4 = 0 \implies \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -4 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$\lambda_1 = 1$ (mult. alg = 1) (1)

$\lambda_2 = -2$ (mult. alg = 2) (1)

$\lambda_1 = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y + z = 0 \implies y = -z \\ x + y = 0 \implies x = z \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow E_1 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ (2)}$$

mult. geo = 1

$\underline{\lambda_2 = -2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

mult. geo = 2 (2)

$$\boxed{C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

(1)

Si es diagonalizable. (1)

(10 pts)

4) a) Los mismos autovalores, ya que:
(1)

$$\det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda I)^T = \det(A^T - \lambda I)$$
(1)

Así, tienen el mismo polinomio característico.

(Total= 2 puntos)

b) Los autovalores son $\frac{1}{\lambda_i}$ (1)

Si λ_i es autovalor de A,

$$A v_i = \lambda v_i \Rightarrow A^{-1} A v_i = A^{-1} \lambda v_i$$

$$\Rightarrow I v_i = \lambda A^{-1} v_i \Rightarrow \lambda A^{-1} v_i = v_i$$

$$\Rightarrow A^{-1} v_i = \left(\frac{1}{\lambda_i}\right) v_i \quad (1)$$

(Total= 2 puntos)

c) Los autovalores son $\lambda_i - 3$, ya que:
(1)

$$\det(A - \lambda_i I) = \det(A - 3I + 3I - \lambda_i I)$$

$$= \det((A-3I) + (3-\lambda_i) I)$$

$$= \det((A-3I) - (\lambda_i - 3) I) \quad (1)$$

(Total= 2 puntos)